

[AI2613 随机过程][第十二讲] 布朗运动

张驰豪

最后更新：2025 年 5 月 20 日

目录

1	布朗运动的定义	2
2	布朗运动的高斯过程刻画	3
3	布朗运动的性质	6
3.1	布朗运动的反射原理	6
3.2	布朗运动与连续鞅	7
3.3	布朗运动的不规则性	7

从今天开始, 我们进入课程的最后一个主题, 即连续时间连续空间的马尔可夫过程。这是一个宏大的话题, 在我们有限的课时里, 只能介绍一些基本的语言。希望这些内容能为大家未来的学习打下基础。最简单, 也是最重要的连续时间连续状态空间的马尔可夫过程是布朗运动, 它是我们熟悉的 $\mathbb{Z}$ 上的均匀随机游走的连续版本, 或者说尺度极限。

1 布朗运动的定义

布朗运动描述了悬浮在液体或气体中的微粒的随机运动。这一现象以植物学家罗伯特·布朗 (Robert Brown) 的名字命名, 他在显微镜下观察并研究了悬浮在水中的花粉颗粒的颤动现象。后来, 阿尔伯特·爱因斯坦 (Albert Einstein) 对此现象给出了物理学上的解释。在数学中, 布朗运动由维纳过程 (Wiener process) 刻画, 该过程以诺伯特·维纳 (Norbert Wiener) 命名, 他是一位著名的数学家, 也是控制论的创始人。

为了引出布朗运动的定义, 我们从一个从 0 开始的一维随机游走开始。令 Z_t 表示时间 t 时的位置, X_t 表示第 t 步的移动量。 X_t 的取值均匀地从 $\{-1, 1\}$ 中选取。注意 $Z_0 = 0$ 且 $Z_{t+1} = Z_t + X_t$ 。因此,

$$Z_T = \sum_{t=0}^{T-1} X_t.$$

于是我们有

$$\mathbf{E}[Z_T] = 0 \quad \text{且} \quad \mathbf{Var}[Z_T] = \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{Var}[X_t] = T.$$

假设现在我们每隔 Δt 秒移动一次, 且每步的步长为 δ 。那么时间 T 时的位置为

$$Z(T) = \delta \sum_{t=1}^{\frac{T}{\Delta t}} X_t.$$

我们关注当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时该过程的行为。此时,

$$\mathbf{E}[Z(T)] = 0 \quad \text{且} \quad \mathbf{Var}[Z(T)] = \delta^2 \sum_{t=1}^{\frac{T}{\Delta t}} \mathbf{Var}[X_t] = \delta^2 \cdot \frac{T}{\Delta t}.$$

通过选择 $\delta = \sqrt{\Delta t}$, 我们可以在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时将该过程的期望和方差与离散随机游走对应起来。由中心极限定理可知, $Z(T)$ 的分布会收敛到 $\mathcal{N}(0, T)$, 即

这里极限的收敛是依分布收敛。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} Z(T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{t=1}^{\frac{T}{\Delta t}} X_t \stackrel{D}{=} \xi_T \sim \mathcal{N}(0, T).$$

换句话说, “连续” 版的一维随机游走在时间 T 时服从 $\mathcal{N}(0, T)$ 分布, 这便是布朗运动。现在我们引入其形式化定义:

定义 1 (标准布朗运动 / 维纳过程). 我们称随机过程 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 为标准布朗运动或维纳过程, 当且仅当它满足以下条件:

- $W(0) = 0$;
- (独立增量) $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n, W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ 是相互独立的;
- (平稳增量) $\forall s, t > 0, W(s+t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t)$;
- $W(t)$ 几乎处处连续。

回忆一下, 均值为 μ 、方差为 σ^2 的高斯分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的概率密度函数为

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

我们用 $\Phi(\cdot)$ 表示 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的累积分布函数 (CDF), 即 $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx$ 。

下面, 我们用 $f_t(x)$ 表示 $\mathcal{N}(0, t)$ 的概率密度函数。对于任意 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n)$ 的联合密度为

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \dots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}).$$

于是, 我们可以方便的计算标准布朗运动中出现的各种概率。

示例 2. 设 $0 \leq s \leq t$ 。我们可以计算当 $X(t) = y$ 时, $X(s)$ 的条件分布。用 $f_{s|t}(x|y)$ 表示条件概率密度, 即 $X(s) = x$ 在给定 $X(t) = y$ 下的概率密度。显然,

$$f_{s|t}(x|y) = \frac{f_s(x) f_{t-s}(y-x)}{f_t(y)} = C \cdot \exp\left(-\frac{(x - ys/t)^2}{2s(t-s)/t}\right),$$

其中 C 是与 x, y, s, t 无关的常数。因此, 条件分布为高斯分布 $\mathcal{N}\left(\frac{s}{t}y, \frac{s}{t}(t-s)\right)$ 。

设 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 为标准布朗运动。如果 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 满足 $X(t) = \mu \cdot t + \sigma W(t)$, 我们称 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 为一个 (μ, σ^2) 布朗运动。显然, $X(t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$ 。

2 布朗运动的高斯过程刻画

我们现在将引入高斯过程的概念, 并给出布朗运动的另一种刻画。首先, 回顾高维高斯分布的概念。一个随机变量向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 被称为 (n 维) 高斯分布, 当且仅当

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间, 则 W 可以看作从 $\Omega \times \mathbb{R}$ 映射到 $\mathbb{R}$ 的函数。“ $W(t)$ 几乎处处连续”的意思是: $\exists \Omega_0 \subseteq \Omega$, 满足 $\mathbb{P}[\Omega_0] = 1$, 且对所有 $\omega \in \Omega_0$, 函数 $f(t) := W(\omega, t)$ 关于 t 是连续的。

关于布朗运动一个最基本的问题就是它是否存在。严格的构造标准布朗运动超出了这门课的范畴, 感兴趣的同学可以参考随机过程的高级教材。我们在这里假设标准布朗运动 (以及其生活在的概率空间) 是存在的。

关于高维高斯分布的更多性质可以参看我的[这个](#)和[这个](#)讲义。

$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i$ 是一维高斯分布。令 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^\top$ 为均值向量, 其中 $\mu_i = \mathbf{E}[X_i]$, 令 $\Sigma = (\text{Cov}[X_i, X_j])_{i,j}$ 为协方差矩阵。则 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的概率密度函数 f 为

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot |\det \Sigma|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

定义 3 (高斯过程). 如果一个随机过程 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 满足 $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, (X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 是高斯分布, 则称其为高斯过程。

注意, 高斯向量可以通过其均值向量和协方差矩阵刻画。标准布朗运动是一类特殊的高斯过程, 其 $X(s)$ 和 $X(t)$ 的协方差为 $s \wedge t$ 。

定义 4 (标准布朗运动 / 标准 Wiener 过程). 我们称一个随机过程 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 为标准布朗运动或 Wiener 过程, 如果它满足以下条件:

- $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 是一个几乎处处连续的高斯过程;
- $\forall s \geq 0, \mathbf{E}[W(s)] = 0$;
- $\forall 0 \leq s \leq t, \text{Cov}(W(s), W(t)) = s$ 。

我们将展示使用 定义 4 验证某随机过程是否为布朗运动更加方便。首先, 我们验证这两个定义是等价的。

命题 5. 标准布朗运动的两个定义是等价的。

证明. 我们先看定义 1 推定义 4。给定定义 1, 因为 $W(s) \sim \mathcal{N}(0, s)$, 很容易知道 $\mathbf{E}[W(s)] = 0$ 对所有 $s \geq 0$ 成立。因此我们需要验证定义 4 中所要求的 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 是高斯过程, 并计算 $W(s)$ 和 $W(t)$ 的协方差。

注意, 对于 $\forall 0 \leq s < t$ 和 $\forall a, b$, 我们有

$$aW(s) + bW(t) = (a+b)W(s) + b(W(t) - W(s)).$$

由于 $W(s)$ 和 $W(t) - W(s)$ 是两个独立的高斯随机变量, $aW(s) + bW(t)$ 仍然是高斯随机变量。

通过协方差的分配律, 对于任意 $0 \leq s \leq t$, 我们有

$$\begin{aligned} \text{Cov}[W(s), W(t)] &= \text{Cov}[W(s), W(t) - W(s) + W(s)] \\ &= \text{Cov}[W(s), W(t) - W(s)] + \text{Cov}[W(s), W(s)] \\ &= \text{Var}[W(s)] = s. \end{aligned}$$

需要注意的是, 两个高斯随机变量的和不一定还是高斯随机变量, 除非它们是联合高斯的。独立只是联合高斯的一个特例 (协方差为零)。

接下来考虑定义 4 推定义 1。给定 定义 4，我们可以直接推导出定义 1 中的第一条和第四条性质。对于任意 $0 \leq t_{i-1} \leq t_i \leq t_{j-1} \leq t_j$ ，我们有

$$\begin{aligned} & \text{Cov} [W(t_i) - W(t_{i-1}), W(t_j) - W(t_{j-1})] \\ &= \text{Cov} [W(t_i), W(t_j)] + \text{Cov} [W(t_{i-1}), W(t_{j-1})] \\ & \quad - \text{Cov} [W(t_i), W(t_{j-1})] - \text{Cov} [W(t_{i-1}), W(t_j)] \\ &= t_i + t_{i-1} - t_i - t_{i-1} = 0. \end{aligned}$$

这表明 $W(t_i) - W(t_{i-1})$ 和 $W(t_j) - W(t_{j-1})$ 是独立的。因此，在 定义 4 中的 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 满足独立增量。

容易验证 $\forall s, t > 0$ ， $W(s+t) - W(s)$ 是一个均值为 0 的高斯随机变量。注意到

$$\begin{aligned} \text{Var} [W(t+s) - W(s)] &= \text{E} [(W(t+s) - W(s))^2] \\ &= \text{E} [W(t+s)^2] + \text{E} [W(s)^2] - 2\text{E} [W(t+s)W(s)] \\ &= \text{Var} [W(t+s)^2] + \text{Var} [W(s)^2] - 2\text{Cov} [W(t+s), W(s)] \\ &= t + s + s - 2s = t \end{aligned}$$

因此，在 定义 4 中的 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 满足平稳增量。 $\square$

示例 6. 假设 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 是一个标准布朗运动。我们断言 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 也是一个标准布朗运动，其中 $X(0) = 0$ 且对于 $t > 0$ ， $X(t) = t \cdot W(\frac{1}{t})$ 。

我们分别来验证定义 4 中的三个要求。由于 $W(\frac{1}{t})$ 是两个（几乎处处）连续函数的复合， $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 也是几乎处处连续的。对于任意 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$ ， $\sum_{i=1}^n a_i X(t_i) = \sum_{i=1}^n a_i t_i \cdot W(\frac{1}{t_i})$ 。由于 $\{W(t)\}$ 是标准布朗运动， $\sum_{i=1}^n a_i t_i \cdot W(\frac{1}{t_i})$ 是高斯分布。因此， $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 是一个高斯过程。对于 $0 \leq s < t$ ，

$$\begin{aligned} \text{Cov} [X(s), X(t)] &= \text{Cov} [sW(\frac{1}{s}), tW(\frac{1}{t})] \\ &= st \cdot \text{Cov} [W(\frac{1}{s}), W(\frac{1}{t})] \\ &= st \cdot \frac{1}{t} = s \end{aligned}$$

因此， $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 是一个标准布朗运动。

3 布朗运动的性质

3.1 布朗运动的反射原理

我们研究布朗运动首次到达位置 b 的时间。这被称为 b 的首次到达时间 (hitting time)。首先考虑标准布朗运动 $\{W(t)\}$ 。定义

$$\tau_b \triangleq \inf \{t \geq 0 \mid W(t) > b\}.$$

对于任意 $t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_b < t] &= \mathbb{P}[\tau_b < t \wedge W(t) > b] + \mathbb{P}[\tau_b < t \wedge W(t) < b] \\ &= \mathbb{P}[W(t) > b] + \mathbb{P}[W(t) < b \mid \tau_b < t] \cdot \mathbb{P}[\tau_b < t]. \end{aligned}$$

注意到 $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ 。令 Φ 为标准高斯分布的累积分布函数, 即

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

则

$$\mathbb{P}[W(t) > b] = \mathbb{P}\left[\frac{W(t)}{\sqrt{t}} > \frac{b}{\sqrt{t}}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right).$$

假设我们已知 τ_b 的值, 且 $\tau_b < t$, 则可以将 $\{W(t)\}_{t \geq \tau_b}$ 视为从位置 b 开始的布朗运动。因此, 如 Figure 1 所示, 有 $\mathbb{P}[W(t) < b \mid \tau_b < t] = \frac{1}{2}$ 。

通过直接计算, 我们得到

$$\mathbb{P}[\tau_b < t] = 2 \left(1 - \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

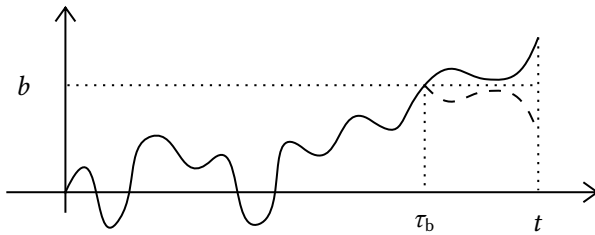


图 1: 反射原则

3.2 布朗运动与连续鞅

我们之前研究过离散鞅。我们现在可以把它推广到（时间）连续の場合。给定一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 以及一个滤链 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ，我们说一个随机过程 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 是一个（相对于 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 的）鞅，如果它满足以下条件：

- $\forall t \geq 0$, $X(t)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的；
- $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$ ；
- $\forall s \leq t$, $\mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}_s] = X(s)$ 。

鞅的概念对于我们未来理论的开展非常有用，今天我们仅仅给出它的定义，并验证几个简单的例子。

这些例子均可以使用定义直接验证，留作练习。

命题 7. 设 $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X(s)_{s \leq t}\})$ 。如下三个随机过程都是相对于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 的鞅。

- $X(t) = W(t)$ ，其中 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 是标准布朗运动；
- $X(t) = W(t)^2 - t$ ；
- $X(t) = \frac{\exp(\theta W(t))}{\mathbb{E}[\exp(\theta W(t))]}$ ，其中 θ 是一个常数。

3.3 布朗运动的不规则性

标准布朗运动 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 的一个经典性质是它的样本路径是几乎必然 (*almost surely*) 连续但不可导的。我们不完整的证明这个性质，而只是简单的来说明一下 $\lim_{t \downarrow 0} \frac{W(t)}{t}$ 是几乎必然不存在的。我们首先来考虑 $\limsup_{t \downarrow 0} \frac{W(t)}{t}$ 。我们在刚才验证过 $X(t) = t \cdot W(\frac{1}{t})$ 也是标准布朗运动，并且注意到

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{W(t)}{t} = \limsup_{s \rightarrow \infty} s W(\frac{1}{s}) = \limsup_{s \rightarrow \infty} X(s).$$

但是，容易验证 $\limsup_{s \rightarrow \infty} X(s) = \infty$ 几乎必然成立。同理 $\liminf_{t \downarrow 0} \frac{W(t)}{t} = -\infty$ 几乎必然成立。因此 $\lim_{t \downarrow 0} \frac{W(t)}{t}$ 几乎必然不存在。

$\lim_{t \downarrow 0} f(t)$ 指的是 $f(t)$ 在 0 的右极限。

要说明 $\limsup_{s \rightarrow \infty} X(s) = \infty$ 几乎必然成立，我们只需要证明对于任何 $a \in \mathbb{Q}$ ， $\limsup_{s \rightarrow \infty} X(s) > a$ 几乎必然成立。我们可以对于每一个足够大的 s ，控制 $\mathbb{P}[X(s) < a]$ 的概率。然后使用 Borel-Cantelli 引理来得到几乎必然的结论。