[AI2613 随机过程][第四讲] 可数无穷状态马尔可夫链

张驰豪

最后更新：*2025 年 4 月 22 日*

目录

1 常返性（Recurrence）

1.1 一个无穷状态马尔可夫链的例子

我们在上节课已经证明了对于任何有限状态的马尔可夫链，一定存在一个平稳分布。我们今天来研究状态不一定是有限的情况。我们首先说明，如果马尔可夫链允许有无穷状态，那么它不一定存在平稳分布。考虑以下在 $\mathbb{N}$ 上的随机游走。这一随机过程的状态空间为 $\mathbb{N}$，在每个状态 i，以概率 p 转移到 $i+1$，以概率 $1-p$ 转移到 $i-1$（若 $i=0$，则以概率 $1-p$ 停留在原地）。 $p \in [0,1]$

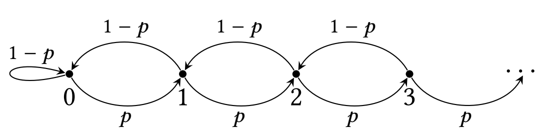

图 1: 一维随机游走

我来研究这个马尔可夫链平稳分布的存在性，我们不妨设 π 为该马尔可夫链的平稳分布。那么根据定义，它一定满足以下关系式：

$$\pi(0) = \pi(0)(1-p) + \pi(1)(1-p) \qquad \Longrightarrow \pi(1) = \frac{p}{1-p}\pi(0),$$
$$\pi(1) = \pi(0)p + \pi(2)(1-p) \qquad \Longrightarrow \pi(2) = \frac{p}{1-p}\pi(1),$$
$$\dots$$
$$\pi(i) = \pi(i-1)p + \pi(i+1)(1-p) \qquad \Longrightarrow \pi(i+1) = \frac{p}{1-p}\pi(i).$$
$$\dots$$

注意 π 是一个分布，因此 $\sum_{i=0}^{\infty}\pi(i) = 1$。我们可以得出以下结论：

- 若 $p < \frac{1}{2}$，即 $\frac{p}{1-p} < 1$，则 $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{p}{1-p}\right)^i\pi(0) = 1$。通过直接计算可得到对于任何 $i \geq 0$，$\pi(i) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i\frac{1-2p}{1-p}$。
- 若 $p > \frac{1}{2}$，则 $\frac{p}{1-p} > 1$。当 $i \to \infty$ 时，若 $\pi(0) \neq 0$，则 $\pi(i) \to \infty$。这意味着 $\pi(0) = \pi(1) = \cdots = \pi(i) = \cdots = 0$。在这种情况下，该马尔可夫链没有平稳分布。
- 若 $p = \frac{1}{2}$，则 $\frac{p}{1-p} = 1$。因此 $\pi(0) = \pi(1) = \cdots = \pi(i) = \cdots$ 且 $\sum_{i=0}^{\infty}\pi(0) = 1$。这意味着 $\pi(0) = 0$，在这种情况下也没有平稳分布。

从这个例子可以看出，对于无穷状态的马尔可夫链，其平稳分布的存在性是一件非平凡的事情。我们接下来仔细研究这个问题。

1.2 强马尔可夫性

设 $X_0, X_1, \dots,$ 为一个齐时的马尔可夫链，其中 $X_i \in \Omega$。我们今天假设 Ω 是一个可能可数无穷的集合，所以我们不能用一个矩阵来表示状态之间的转移，但我们可以定义一个函数

$$P\colon \Omega^2 \to [0,1]$$

满足对于任何 $i \in \Omega$，$\sum_{j\in\Omega} P(i,j) = 1$。我们有的时候会把 P 称为一个马尔可夫链的转移核（transition kernel）或者马尔可夫核（Markov kernel）。我们前面说过，马尔可夫链满足所谓的马尔可夫性，也就是说

$$\forall t < s,\ \forall x_1, \dots, x_t, x_s \in \Omega,\ \mathbb{P}\left[X_s = x_s \mid X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0\right] = \mathbb{P}\left[X_s = x_s \mid X_t = x_t\right].$$

一个比较有意思的事情是，如果我们把上面定义里面的 t 换成一个随机变量（我们一般用 τ 来表示），类似的事情还对不对？实际上，这是一类更强的性质。

我们未来会把转移核的概念推广更大的 Ω（比如 $\mathbb{R}$）上，但现在我们假设 Ω 是可数无穷或者有限就好了。马尔可夫核也定义了一个概率空间。我们可以把样本空间里的每一个样本点想象成我们进行一个无限长的随机游走的时候初始 X_0 的取值以及每一步按照马尔可夫核定义的规则进行转移时候投掷的随机硬币的取值。这个样本空间上我们可以定义一个合法的概率空间，并且把里面的概率测度叫 $\mathbb{P}$。

定义 1. 定义在同一个概率空间上的随机变量 $X_0, X_1, \ldots$ 如果满足对于任意 (可以是随机的) $\tau < \infty$，其中 τ 是停时（stopping time），都有

$$\forall \tau < s,\ \forall x_1, \ldots, x_\tau, x_s \in \Omega,\ \mathbb{P}\left[X_s = x_s \mid X_\tau = x_\tau, X_{\tau-1} = x_{\tau-1}, \ldots, X_0 = x_0\right] = \mathbb{P}\left[X_s = x_s \mid X_\tau = x_\tau\right]$$

以概率 1 成立，则称这个随机过程具有**强马尔可夫性**。

一个随机变量 τ 是停时指的是对于任何 $t \geq 0$，在我们看到了 $X_0, X_1, \ldots, X_t$ 之后，就知道 $[\tau \geq t]$ 这个事件是否发生了。换句话说，如果我们想象 τ 是让过程终止的时刻，那么根据前 t 轮的信息，我们就能知道是否在第 t 轮终止。我们在未来会详细介绍停时的概念。

容易验证，我们定义的离散时间的马尔可夫链总是满足强马尔可夫性的。有了强马尔可夫性，我们可以得到下面这个结论。

对于连续时间的随机过程，可能满足马尔可夫性但不满足强马尔可夫性，见这个帖子的讨论。

命题 2. 对于任何 $t_1, t_2, \ldots, t_k$ 以及 $x_0, x_1, \ldots, x_k$，以及任何（可能随机）的时刻 τ，我们都有

$$\mathbb{P}\left[X_{\tau+t_1} = x_1, \ldots, X_{\tau+t_k} = x_k \,\middle|\, X_\tau = x_0\right] = \mathbb{P}\left[X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_k} = x_k \,\middle|\, X_0 = x_0\right].$$

换句话说，假设在某个时候，马尔可夫链回到了状态 x_0，那么它未来的分布和一开始从 x_0 开始的分布是一样的，也就是说世界重启了。

1.3 常返性

在讨论涉及无穷状态的时候，我们要把状态进行分类。

我们刚才非正式的介绍了马尔可夫链所对应的概率空间。T_i 是这个概率空间上的一个随机变量，对于一个输入的样本点 ω，$T_i(\omega) = \min\{t \geq 1 \mid X_t(\omega) = i\}$ 为在这个样本点上第一次访问状态 i 的时间（初始点不算）。它有的时候又被称为首返时间（*first return time*）

定义 3. 对于 $i \in \Omega$，令 $T_i > 0$ 为第一次返回状态 i 的时间。记 $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}\left[\cdot | X_0 = i\right]$ 为把 X_0 固定为 i 之后的概率测度。若 $\mathbb{P}_i\left[T_i < \infty\right] = 1$，则称状态 i 是常返（***recurrent***）的，否则称其为瞬时（***transient***）的。

换句话说，常返性表示的是，从状态 i 出发，以概率一在有限的时间内会回到 i。用我们上一节的语言说，就是世界会在有限步内重启。直观上，如果 i 具有常返性，那么从 i 出发，世界将会一遍又一遍的重复。我们用 $N_i := \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{1}\left[X_t = i\right]$ 来表示一共会访问多少次 i，那么有以下结论：

命题 4. 若 i 是常返的，则 $\mathbb{P}_i\left[N_i = \infty\right] = 1$。

证明. 对于每一个 $k \geq 1$，我们定义第 k 次的返回时间

$$T_i^{(1)} = T_i; \quad \forall k \geq 2,\ T_i^{(k)} = \min\left\{t > T_i^{(k-1)} \,\middle|\, X_t = i\right\}.$$

我们接下来使用归纳法证明对于每一个 $k \geq 1$，都有 $\mathbb{P}_i\left[T_i^{(k)} < \infty\right] = 1$。当 $k = 1$ 时，显然成

立。那么假设对于 $k \geq 2$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i\left[T_i^{(k)} < \infty\right] &= \mathbb{P}_i\left[T_i^{(k)} < \infty \,\middle|\, T_i^{(k-1)} < \infty\right] \cdot \mathbb{P}_i\left[T_i^{(k-1)} < \infty\right] \\
\text{(归纳假设)} \quad &= \mathbb{P}_i\left[T_i^{(k)} < \infty \,\middle|\, T_i^{(k-1)} < \infty\right] \\
\text{(强马尔可夫性)} \quad &= \mathbb{P}_i\left[T_i < \infty\right] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

这便等价于 $\mathbb{P}_i[N_i = \infty] = 1$。 □

我们接下来想说明，常返性不是一个状态单独的形式，如果 i 和 j 在状态转移图中是连通的，那么他们俩要么同时是常返态，要么同时是瞬态。这个结论可以告诉我们，如果一个马尔可夫链是不可约的，那么要么每个状态都是常返的，要么每个都不是。因此，我们有的时候会说一个马尔可夫链是常返的。

我们之前的不可约是对于有限状态的马尔可夫链定义的。但显然这个定义可以推广到一般的状态空间中去，也就是说对于任意 $i, j \in \Omega$，都可以在有限步内从 i 走到 j（存在有限的 t，$P^t(i,j) > 0$）。

命题 5. *若 i 是常返的，并且在状态转移图中存在从 i 到 j 的一条有限路径，则 j 也是常返的。*

证明. 我们的证明分三步，首先说明 $\mathbb{P}_i\left[T_j < \infty\right] = 1$，也就是说以概率 1，从 i 出发会在有限步内到达 j。由于我们知道存在一条从 i 到 j 的有限路径，我们假设这条有限路径上所有概率的乘积为 $q > 0$。于是，从 i 出发，有 q 的概率，我们会直接沿着这条路径直接走到 j。我们考虑一个几何分布 $\mathrm{Geom}(q)$，然后把我们从 i 出发的随机游走和这个分布进行一个耦合：我们扔一个 $\mathrm{Ber}(q)$ 的硬币，如果是正面，则沿着这个路径直接走到 j，否则我们就按照马尔可夫链剩下正确的概率进行游走。当返回了 i 之后，我们就投掷第二个硬币。以此类推，直到投出一个正面，而此时我们也从 i 出发沿着路径直接走到了 j。容易证明，即使在硬币投掷为反面的条件下，我们一定也以概率 1 在有限步能返回到 i。而任何一个 $q \neq 0$ 的几何分布以概率 1 在有限步内投掷出正面，而每次投掷在我们的耦合里我们都是以概率 1 走有限步，使用 union-bound，一定以概率 1 走有限步到达 j。因此我们有 $\mathbb{P}_i\left[T_j < \infty\right] = 1$。

请使用全概率公式验证这一点

我们接着说明 $\mathbb{P}_j[T_i < \infty] = 1$。使用反证法，如果 $\mathbb{P}_j[T_i < \infty] = p < 1$，那么从 i 出发，我有 q 的概率直接走到 j，然后又有 $1-p$ 的概率无法在有限步回到 i，那么说明 $\mathbb{P}_i[T_i = \infty] \geq q(1-p)$，矛盾。

有了这两个结论，那我们知道从 j 出发，我们以 1 的概率有限步到 i，接着我们又以 1 的概率有限步到 j，所以

$$\mathbb{P}_j\left[T_j < \infty\right] \geq \mathbb{P}_j\left[T_i < \infty\right] \cdot \mathbb{P}_i\left[T_j < \infty\right] = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

我们接着给出几个常返的等价刻画，我们之前已经说明了，如果一个状态 i 是常返的，那么 $\mathbb{P}_i[N_i=\infty]=1$。我们接下来说明反过来也是成立的。

命题 6. 设 i 是一个状态，N_i 是从 i 开始的访问次数。则以下条件等价：

1. i 是常返的。
2. $\mathbb{P}_i[N_i=\infty]=1$。
3. $\mathbf{E}_i[N_i]=\infty$。

证明. 我们已经证明了 $1 \implies 2$，而 $2 \implies 3$ 是显然的。我们现在说明 $3 \implies 1$。假设 i 不是常返的，也就是说 $\mathbb{P}_i[T_i<\infty]=\alpha<1$。那我们可以把从 i 出发的随机游走返回自身的次数和一个几何分布 $\mathrm{Geom}(1-\alpha)$ 进行耦合: 从 i 开始，投掷一个硬币 $\mathrm{Ber}(1-\alpha)$，如果是正面，就不再回来了，否则就会在有限步内回来，并重新投掷硬币，重复以上过程。于是，$N_i+1\sim\mathrm{Geom}(1-\alpha)$。因此它的期望是有限的，矛盾。 □

对于一般的非负随机变量 X，$\mathbb{P}[X=\infty]=1$ 显然是要比 $\mathbf{E}[X]=\infty$ 强的。但这儿，对于 $X=N_i$，在 $\mathbb{P}_i$ 下两者是等价的。

我们有的时候便可以通过计算 $\mathbf{E}_i[N_i]$ 来判断一个状态是否是常返的。下面是一个著名的例子。

A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever. — 角谷静夫

示例 7 (醉汉与醉鸟)**.** 想象在一个网格上进行随机游走，每一步我们都均匀随机地选择一个方向。那么我们是否能够以概率 1 回到原点？或者等价地，这个马尔可夫链是常返的还是瞬时的？首先我们考虑一维网格。设 $X_0=0$ 且 $X_{t+1}=X_t+\Delta$，其中 Δ 是从 $\{-1,1\}$ 中独立均匀随机选取的。于是，

$$\mathbf{E}_0[N_0]=\mathbf{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\mathbb{1}[X_t=0]\right]=\sum_{t=0}^{\infty}\mathbb{P}_0[X_t=0]=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}_0[X_{2m}=0].$$

其中最后一步是由于我们只可能在偶数步回到原点。我们用斯特林公式来估算一下概率 $\mathbb{P}_0[X_{2m}=0]$。对于 $m\geq 1$，

斯特林公式：$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+o(1))$。

$$\mathbb{P}_0[X_{2m}=0]=\frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}}\approx\frac{\sqrt{4\pi m}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{2\pi m\left(\frac{m}{e}\right)^{2m}}\cdot 2^{-2m}=\frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

因此，$\mathbf{E}_0[N_0]=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}_0[X_{2m}=0]\approx 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi m}}$ 是发散的。这表明一维网格上的随机游走的马尔可夫链是常返的。

对于 d 维网格上的随机游走，我们可以简单的将其建模成在每一维独立的随机游走。也就是说，对于每一个 $i\in[d]$，独立均匀随机的选取 $\Delta_i\in\{-1,1\}$，然后移动到 $X_{t+1}=X_t+(\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_d)$。由此可得 $\mathbb{P}_i[X_{2m}=\mathbf{0}]=(\mathbb{P}_i[X_{2m}(1)=0])^d\approx\left(\frac{1}{\sqrt{\pi m}}\right)^d$。我们知道级数

$1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi m}}\right)^d$ 当且仅当 $d \le 2$ 时发散。因此，只有当网格的维数为 1 或 2 时，随机游走才是常返的。

2 正常返（Positive Recurrence）与零常返（Null Recurrence）

但是，我们马上可以看到例子说明，一个不可约的马尔可夫链，如果它有常返性，并不能保证存在平稳分布。为了进一步刻画什么时候一个马尔可夫链存在平稳分布，我们引入正常返（positive recurrence）的概念。

正常返有时候简称“正返”，零常返有时候简称“零返”。

定义 8 (正常返性). *如果一个状态 i 是常返的，并且满足 $\mathbf{E}_i[T_i] < \infty$，我们称它是***正常返***的。如果该状态是常返的但是 $\mathbf{E}_i[T_i] = \infty$，则称其为***零常返***的。*

我们依旧研究图1的例子，来看看它什么时候是常返，什么时候是正常返的。为了严格说明这一点，我们用 $c_1, c_2, \cdots \sim \mathrm{Ber}(p)$ 来表示随机游走每一步时候所投掷的硬币。我们用这个硬币来决定移动的方向：在第 t 步时，

显式的引入 c_i 的目标是定义清楚这个随机过程的概率空间，每一个序列 $c_1, c_2, \ldots$ 是一个样本点。因为我们接下来要使用一些随机变量的等式，因此把样本点定义出来是必要的。

- 如果 c_t 是正面，则向右走；
- 如果 c_t 是背面，且目前的位置不为零，则向左走，否则原地不动。

我们用 Δ_t 来表示这个移动的增量，注意，Δ_t 是由 c_t 和当前位置共同决定的。对于任何 $i \ge 0$，我们定义一族随机变量 $\left\{X_t^i\right\}_{t\ge 0}$ 用来表示从 i 开始的随机游走的每一步的状态。我们对于任何 i，我们有

$$X_0^i = i;\ \forall t \ge 1,\ X_t^i = X_{t-1}^i + \Delta_t.$$

我们用记号 $T_{i\to j}$ 表示 X_t^i 中第一次到达 j 的时间，也就是说

$$T_{i\to j} = \min\left\{t \ge 1 \,\middle|\, X_t^i = j\right\}.$$

定义事件 $\mathscr{A} = [\Delta_1 = +1]$，即“第一步向右移动”，那么根据马尔可夫性，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[T_{0\to 0}<\infty\right] &= \mathbb{P}\left[T_{0\to 0}<\infty|\bar{\mathscr{A}}\right]\mathbb{P}\left[\bar{\mathscr{A}}\right]+\mathbb{P}\left[T_{0\to 0}<\infty|\mathscr{A}\right]\mathbb{P}\left[\mathscr{A}\right] \\
&= (1-p)\cdot 1+p\cdot\mathbb{P}\left[T_{1\to 0}<\infty\right], \qquad (1)\\
\mathbb{P}\left[T_{1\to 0}<\infty\right] &= \mathbb{P}\left[T_{1\to 0}<\infty|\bar{\mathscr{A}}\right]\mathbb{P}\left[\bar{\mathscr{A}}\right]+\mathbb{P}\left[T_{1\to 0}<\infty|\mathscr{A}\right]\mathbb{P}\left[\mathscr{A}\right] \\
&= (1-p)\cdot 1+p\cdot\mathbb{P}\left[T_{2\to 0}<\infty\right], \qquad (2)\\
\mathbb{P}\left[T_{2\to 0}<\infty\right] &= \mathbb{P}\left[T_{2\to 1}<\infty\wedge T_{1\to 0}^{T_{2\to 1}}<\infty\right] \\
\text{(强马尔可夫性)}\quad &= \mathbb{P}\left[T_{2\to 1}<\infty\right]\cdot\mathbb{P}\left[T_{1\to 0}^{T_{2\to 1}}<\infty\right] \\
&= \mathbb{P}\left[T_{1\to 0}<\infty\right]^2. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

为简便起见，令 $y\triangleq\mathbb{P}\left[T_{1\to 0}<\infty\right]$。结合式 (2) 和式 (3)，我们得到 $y=1-p+py^2$，解得 $y=1$ 或 $y=\frac{1-p}{p}$。根据式 (1)，$\mathbb{P}\left[T_{0\to 0}<\infty\right]=1$ 或 $2-2p$。

这里 $T_{1\to 0}^{T_{2\to 1}}:=T_{1\to 0}\circ\theta_{T_{2\to 1}}$，其中 $\theta_{T_{2\to 1}}$ 是移位算子，表示把输入的样本点移动 $T_{2\to 1}$ 步。直观上，我们想说 $T_{1\to 0}^{\tau}$ 是一个随机变量，它表示给定一个样本点，我们的随机游走先走 τ 步之后 $T_{1\to 0}$ 的取值。实际上，我们在接下来的计算中，很多时候都隐式的使用了移位算子。

- 当 $p<\frac{1}{2}$ 时，$2-2p$ 作为概率无意义。因此 $\mathbb{P}\left[T_{0\to 0}<\infty\right]=1$，马尔可夫链是常返的。
- 当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$2-2p=1$。在此情况下，马尔可夫链也是常返的。
- 当 $p>\frac{1}{2}$ 时，我们马上会验证 $\mathbb{P}\left[T_{0\to 0}<\infty\right]<1$，于是就有 $\mathbb{P}\left[T_{0\to 0}<\infty\right]=2-2p$。令 $\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是一组独立同分布的随机变量，定义为

$$
\delta_k=\begin{cases}+1, & \text{概率为}p,\\ -1, & \text{概率为}1-p.\end{cases}
$$

对于一个足够大的 $n\in\mathbb{N}$，我们可以以概率 $p^n>0$ 在 n 步内从 0 走到 n（即 $X_n=n$）。假设我们已经到达 n，考虑从 n 返回 0 恰好需要 k 步的概率。显然，当 $k<n$ 时该概率为零。对于每一个 $k\geq n$，我们对 $\mathbb{P}\left[T_{n\to 0}=k\right]$ 进行上界估计：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[T_{n\to 0}=k\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sum_{t=1}^{k}\delta_t=-n\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\sum_{t=1}^{k}\delta_t-\mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{k}\delta_t\right]\leq -n-\mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{k}\delta_t\right]\right] \\
\text{(Hoeffding 不等式)}\quad &\leq \exp\left(-\frac{2k\left(\frac{n+(2p-1)k}{k}\right)^2}{4}\right).
\end{aligned}
$$

然后，我们计算从 n 返回 0 的概率。通过 union-bound，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[T_{n\to 0}<\infty\right] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k\geq n}\left[T_{n\to 0}=k\right]\right]\\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}\left[T_{n\to 0}=k\right]\\ &\leq \exp\left(-(2p-1)n\right)\sum_{k=n}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{2k}-\frac{(2p-1)^2k}{2}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{2k}\right)\cdot\exp\left(-\frac{(2p-1)^2k}{2}\right) &\leq \sum_{k=n}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2p-1)^2k}{2}\right)\\ &= \frac{\exp\left(-\frac{(2p-1)^2}{2}n\right)}{1-\exp\left(-\frac{(2p-1)^2}{2}\right)}.\end{aligned}$$

因此，

$$\mathbb{P}\left[T_{n\to 0}<\infty\right]\leq\frac{\exp\left(-\frac{(2p-1)^2}{2}n-(2p-1)n\right)}{1-\exp\left(-\frac{(2p-1)^2}{2}\right)}. \tag{4}$$

由于式 (4) 的右侧关于 n 是指数级减小的，我们可以找到一个足够大的常数 n 使得 $\mathbb{P}\left[T_{n\to 0}<\infty\right]<1$，因此，对于足够大的 n，从 0 走到 n 且永远不返回的概率大于 $p^n\cdot\mathbb{P}\left[T_{n\to 0}=\infty\right]>0$。因此，该马尔可夫链是瞬时的。

接下来我们验证当 $p<\frac{1}{2}$ 时马尔可夫链是正常返的，而当 $p=\frac{1}{2}$ 时是零常返的。使用马尔可夫性和全期望公式，

$$\mathbf{E}\left[T_{0\to 0}\right]=\mathbb{P}\left[\bar{\mathscr{A}}\right]\cdot 1+\mathbb{P}\left[\mathscr{A}\right]\left(1+\mathbf{E}\left[T_{1\to 0}\right]\right), \tag{5}$$

$$\mathbf{E}\left[T_{1\to 0}\right]=\mathbb{P}\left[\bar{\mathscr{A}}\right]\cdot 1+\mathbb{P}\left[\mathscr{A}\right]\left(1+\mathbf{E}\left[T_{2\to 0}\right]\right), \tag{6}$$

$$\mathbf{E}\left[T_{2\to 0}\right]=\mathbf{E}\left[T_{2\to 1}\right]+\mathbf{E}\left[T_{1\to 0}\right]. \tag{7}$$

这里的(7)式的正确性同样使用了移位算子：即我们有随机变量等式 $T_{2\to 0}=T_{2\to 1}+T_{1\to 0}\circ\theta_{T_{2\to 1}}$。

注意 $\mathbf{E}\left[T_{2\to 1}\right]=\mathbf{E}\left[T_{1\to 0}\right]$。对式 (6) 取期望并结合式 (7)，我们有

$$\mathbf{E}\left[T_{1\to 0}\right]=1-p+p(1+2\mathbf{E}\left[T_{1\to 0}\right]),$$

解得 $\mathbf{E}\left[T_{1\to 0}\right]=\frac{1}{1-2p}$。对式 (5) 取期望，我们得到 $\mathbf{E}\left[T_{0\to 0}\right]=\frac{1-p}{1-2p}$。因此：

- 当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$\mathbf{E}\left[T_{0\to 0}\right]=\infty$，该马尔可夫链是零返的。
- 当 $p<\frac{1}{2}$ 时，$\mathbf{E}\left[T_{0\to 0}\right]<\infty$，该马尔可夫链是正返的。