[AI2613 随机过程][第八讲] 连续时间离散空间马尔可夫过程

张驰豪（scribed by 和昱辰）

最后更新：*2025 年 4 月 17 日*

目录

1 连续时间马尔可夫过程的基本概念 1

1.1 定义 1

1.2 转移概率 2

2 跳转速率 3

2.1 跳转速率的定义 3

2.2 由跳转速率构造马尔可夫过程 4

3 平稳分布与细致平衡条件 5

A 连续与离散时间马尔可夫过程的对应关系 7

1 连续时间马尔可夫过程的基本概念

1.1 定义

在前两讲中，我们定义了泊松过程，泊松过程的状态空间是离散的，但它在时间上是连续的，现在我们希望推广泊松过程，来定义一般的连续时间马尔可夫过程。

我们通常把离散时间的随机过程称为链，连续时间的称为过程。

定义 1 (连续时间马尔可夫过程). *考虑一族随机变量* $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$*，其中* $X(t)\in\Omega$*，若对于任意的* $0\leq t_0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_n$*，以及任意状态* $i_0,i_1,\ldots,i_n\in\Omega$*，有*

$$\mathbb{P}\left[X(t_n)=i_n \mid X(t_{n-1})=i_{n-1},\ldots,X(t_0)=i_0\right]=\mathbb{P}\left[X(t_n)=i_n \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}\right],$$

我们称 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ 为连续时间的马尔可夫过程。

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示所有非负实数的集合。

在本讲中，我们假设 Ω 是离散且可数的，我们将在之后的课程中进一步推广来考虑连续状态空间的情况。

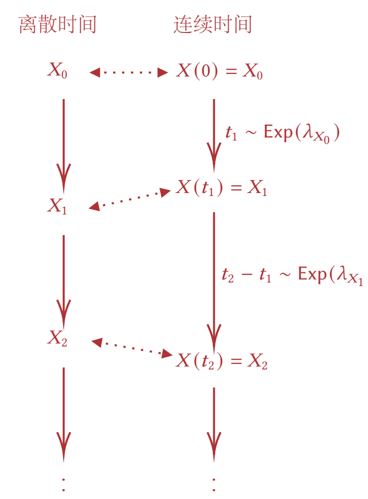
离散状态空间、连续时间的马尔可夫过程的研究本身是一个很大的课题。运筹学的一个分支排队论就广泛的使用这类马尔可夫链进行建模，也是传统随机过程课程中的重要内容。因为课时原因，这不是我们这一门课的重点。我们仅在这一节课讨论其一些基本的性质。我们这样做的目的是为这门课下半学期的重点内容 – 连续状态空间、连续时间的马尔科夫过程做一个铺垫。

考虑这样一个直观，假设当前时刻处于状态 i，令 τ 表示当前时刻到下一次状态转移发生的时间间隔，由马尔可夫性，对于任意的 $s,t\geq 0$，有 $\mathbb{P}[\tau > s+t \mid \tau > s] = \mathbb{P}[\tau > t]$。这说明 τ 服从指数分布，记这个指数分布的参数为 λ_i（λ_i 的取值可以与当前状态 i 有关）。

基于这个直观，我们可以用耦合的视角来理解连续时间离散空间的马尔可夫过程。假设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ 是一个离散时间的（时间齐次的）马尔可夫链，其从状态 i 转移到 j 的概率为 $u(i,j)$，考虑一个连续时间马尔可夫过程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$，当 $X(t)=i$ 时，它的转移方式如下：

在今天接下来的讨论里，我们可以不失一般性的假设 $u(i,i)=0$（why?）

- 令 $\tau_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$，$\forall s\in[t,t+\tau_i)$, $X(s)=X(t)=i$；
- 从分布 $u(i,\cdot)$ 中采样得出状态 j，令 $X(t+\tau_i)=j$。



示例 2 (泊松过程). *在速率为 λ 的泊松过程这个特例上，所有的 λ_i 是相等的，并且 $\lambda_i=\lambda$，其对应的离散时间马尔可夫链的转移概率为 $u(i,j)=\begin{cases}1, & j=i+1\\ 0, & j\neq i+1\end{cases}$。*

示例 3 (生灭过程). *我们可以用连续时间马尔可夫过程来建模一个族群里的人数变化。假设族群有 n 个人时，人数增加和减少的速率分别为 λ_n 和 μ_n，也就是说，令 $\gamma_n\sim\mathrm{Exp}(\lambda_n)$，$\xi_n\sim\mathrm{Exp}(\mu_n)$，在 $\tau_n=\min\{\gamma_n,\xi_n\}$ 的时间里，人数保持不变，若 $\gamma_n\leq\xi_n$，则在 τ_n 时间后人数加一，反之则减一。根据我们之前学过的指数竞赛的结论，$\tau_n\sim\mathrm{Exp}(\lambda_n+\mu_n)$，发生状态转移时，状态以概率 $\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n}$ 变为 $n+1$，以概率 $\frac{\mu_n}{\lambda_n+\mu_n}$ 变为 $n-1$。*

1.2 转移概率

对于离散时间的马尔可夫链，其 t 步的转移概率为 $P^t(i,j)=\mathbb{P}[X_t=j\mid X_0=i]$，对于连续时间的马尔可夫过程，我们也可以类似地定义 $P_t(i,j)=\mathbb{P}[X(t)=j\mid X(0)=i]$。

在本讲义中，我们用下标 P_t 表示连续时间的马尔可夫过程经过时间 t 的转移概率，上标 P^t 表示离散时间马尔可夫链 t 步的转移概率。类似离散时间的情况，在 Ω 有限的时候，我们也可以把 P_t 看作一个 $\Omega\times\Omega$ 的矩阵，在 Ω 无限的时候，我们把它看成 $\Omega^2\to[0,1]$ 的一个函数。

对于每个状态的状态转移速率 λ_i 均相同且等于 λ 的马尔可夫过程，它的转移概率是不难计算的，易知时间段 t 内发生的状态转移次数服从参数为 λt 的泊松分布，所以有

$$P_t(i,j)=\sum_{n\geq 0}(\lambda t)^n\cdot\frac{e^{-\lambda t}}{n!}\cdot u^n(i,j),$$

其中 $u(i,j)$ 是其对应的离散时间马尔可夫链的转移概率。对于泊松过程来说，$u^n(i,j)$ 非零当且仅当 $j=i+n$，故可以得出 $P_t(i,j)=(\lambda t)^{j-i}\cdot\frac{e^{-\lambda t}}{(j-i)!}$。

对于离散时间马尔可夫链，对任意的 $s,t \in \mathbb{N}$，我们有 $P^{s+t} = P^s P^t$，对于连续时间的情况，我们也有类似结论。

定理 4 (查普曼-柯尔莫戈洛夫等式，Chapman-Kolmogorov Equation). 对于任意的 $s,t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，任意的 $i,j \in \Omega$，$P_{s+t}(i,j) = \sum_{k\in\Omega} P_s(i,k) \cdot P_t(k,j)$。

证明.

$$\begin{aligned}
P_{s+t}(i,j) &= \mathbb{P}\left[X(s+t) = j \mid X(0) = i\right] \\
\text{(全概率公式)} \quad &= \sum_{k\in\Omega} \mathbb{P}\left[X(s+t) = j, X(s) = k \mid X(0) = i\right] \\
&= \sum_{k\in\Omega} \mathbb{P}\left[X(s+t) = j \mid X(s) = k, X(0) = i\right] \cdot \mathbb{P}\left[X(s) = k \mid X(0) = i\right] \\
\text{(马尔可夫性)} \quad &= \sum_{k\in\Omega} P_s(i,k) \cdot P_t(k,j).
\end{aligned}$$

□

2 跳转速率

2.1 跳转速率的定义

在离散时间马尔可夫链里，P^t 是按转移矩阵 P 跳转 t 次得到的转移概率，特别的 $P = P^1$ 是一步转移的概率矩阵（函数）。对于连续时间，这样 “一步转移” 的类比应该是什么呢？由于时间是连续、可以无限可分的，我们用下面这个极限来作为 $P(i,j)$ 的类比，它被称为跳转速率。

定义 5 (跳转速率). 对于任意的 $i,j \in \Omega$ 且 $i \neq j$，跳转速率 $q(i,j) := \lim_{h\to 0} \frac{P_h(i,j)}{h}$。

我们现在计算一下 $q(i,j)$。，对于任意的 $i \neq j$，有

类比：$\forall i \neq j, P(i,j) \leftrightarrow q(i,j) = \lim_{h\to 0} \frac{P_h(i,j)}{h}$。

$$\begin{aligned}
q(i,j) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n\geq 0} (\lambda_i h)^n \cdot \frac{e^{-\lambda_i h}}{n!} \cdot u^n(i,j)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\lambda_i h} \cdot u^0(i,j) + \lambda_i h \cdot e^{-\lambda_i h} \cdot u(i,j) + o(h)}{h} \\
(u^0(i,j) = 0) \quad &= \lim_{h\to 0} \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i h} \cdot u(i,j) \\
&= \lambda_i \cdot u(i,j).
\end{aligned}$$

这个表达式也很直观，当马尔科夫过程处于状态 i 时，以 λ_i 的速率试图跳转，而以 $u(i,j)$ 的概率跳转到 j。

2.2 由跳转速率构造马尔可夫过程

对于离散的马尔可夫链，当我们知道了转移矩阵 P，我们可以方便的计算出走 t 步从 i 转移到 j 的概率，即 $P^t(i,j)$。那么，在连续的场合，如果我们知道跳转速率 $q(i,j)$，一个自然的问题是如何计算 $P_t(i,j)$ 呢？为解答这个问题，我们先建立一些方程来描述 P_t 的变化率与跳转速率的关系。

考虑 $P_{t+h}(i,j)-P_t(i,j)$，由定理 4，我们知道

$$\begin{aligned} P_{t+h}(i,j)-P_t(i,j) &= \sum_{k\in\Omega} P_h(i,k)P_t(k,j)-P_t(i,j) \qquad (1)\\ &= \sum_{k\in\Omega\setminus\{i\}} P_h(i,k)P_t(k,j)-(1-P_h(i,i))P_t(i,j). \end{aligned}$$

进一步地，

$$\begin{aligned} P_t'(i,j)=\lim_{h\to 0}\frac{P_{t+h}(i,j)-P_t(i,j)}{h} &= \sum_{k\in\Omega\setminus\{i\}} q(i,k)P_t(k,j)-P_t(i,j)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-P_h(i,i)}{h}\\ &= \sum_{k\in\Omega\setminus\{i\}} q(i,k)P_t(k,j)-P_t(i,j)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k\in\Omega\setminus\{i\}}P_h(i,k)}{h}\\ &= \sum_{k\in\Omega\setminus\{i\}} q(i,k)P_t(k,j)-P_t(i,j)\cdot\sum_{k\in\Omega\setminus\{i\}} q(i,k)\\ (\textstyle\sum_{k\in\Omega\setminus\{i\}} q(i,k)=\lambda_i) \quad &= \sum_{k\in\Omega\setminus\{i\}} q(i,k)P_t(k,j)-\lambda_i\cdot P_t(i,j). \qquad (2) \end{aligned}$$

当状态空间是可数无穷大时，一些计算会涉及到极限的可交换问题，我们不妨先不加验证地假设总是可交换的。事实上，不妨假设我们只关心那些可交换的问题。

定义如下矩阵（或函数）Q，对于任意的 $i,j\in\Omega$，$Q(i,j)=\begin{cases} q(i,j), & i\neq j\\ -\lambda_i, & i=j\end{cases}$，那么由式 (2) 可得，$P_t'=Q\cdot P_t$，这个式子被称为*柯尔莫戈洛夫后向方程*（Kolmogorov backward equation, KBE）。类比于 Q 是数的情况，考虑我们这里的边界情况，可以得到该方程的解是 $P_t=e^{tQ}$，其中 $e^{tQ}:=\sum_{n\geq 0}\frac{t^nQ^n}{n!}$。由此我们便由跳转速率得出了其对应的马尔可夫过程的转移概率。

在连续时间的马尔可夫过程中，矩阵 Q 被称为这个马尔可夫过程的生成元。我们把它类比成离散时间里的 $P-I$。其对角线上减去一个单位矩阵，正好比离散时间的马尔可夫链以速率 1 跳转。

注意到在式 (1) 中，我们把 $t+h$ 拆成了先走时间 h，再走时间 t，如果我们反过来，先走时间 t，再走时间 h，就可以把式 (1) 改写为 $P_{t+h}(i,j)-P_t(i,j)=\sum_{k\in\Omega}P_t(i,k)P_h(k,j)-P_t(i,j)$，经过类似的计算，我们可以得出 $P_t'=P_t\cdot Q$，这被称为*柯尔莫戈洛夫前向方程*（Kolmogorov forward equation, KFE），它的解同样是 $P_t=e^{tQ}$。

对于离散时间的马尔可夫链，KBE 和 KFE 分别对应于 $P^t-P^{t-1}=(P-I)P^{t-1}$ 和 $P^t-P^{t-1}=P^{t-1}(P-I)$，这两个式子在离散时间的情况下是平凡的。

示例 6 (泊松过程). *我们已经计算过泊松过程的跳转速率* $q(i,j)=\begin{cases}\lambda, & j=i+1\\ 0, & j\neq i+1\end{cases}$，*以及其转*

移概率 $P_t(i,j) = \begin{cases} (\lambda t)^{j-i} \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{(j-i)!}, & j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases}$，现在我们来验证 *KBE*。通过直接计算，我们可以得出

$$P'_t(i,j) = \begin{cases} -\lambda e^{-\lambda t}, & j = i \\ -\lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} + e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^{j-i} t^{j-i-1}}{(j-i-1)!}, & j \neq i \end{cases}. \tag{3}$$

另一方面，通过 *KBE* 我们可以得出 $P'_t(i,j) = \lambda \cdot P_t(i+1,j) - \lambda \cdot P_t(i,j)$，容易验证这和式 (3) 是等价的。

示例 7 (2 个状态的连续时间马尔可夫过程). 假设状态空间 $\Omega = \{1,2\}$，处于状态 1 和 2 时的转移发生速率分别为 λ 和 μ，于是按照定义有 $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$。我们现在通过 *KBE* 来计算该马尔可夫过程的转移概率，由 *KBE* 可得

$$\begin{pmatrix} P'_t(1,1) & P'_t(1,2) \\ P'_t(2,1) & P'_t(2,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_t(1,1) & P_t(1,2) \\ P_t(2,1) & P_t(2,2) \end{pmatrix}$$

从而有

$$\begin{cases} P'_t(1,1) = -\lambda \cdot P_t(1,1) + \lambda \cdot P_t(2,1) \\ P'_t(2,1) = \mu \cdot P_t(1,1) - \mu \cdot P_t(2,1) \end{cases}. \tag{4}$$

令 $f(t) = P_t(1,1) - P_t(2,1)$，我们可推出 $f'(t) = -(\lambda+\mu) f(t)$，故 $f(t) = f(0) \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}$，由于 $f(0) = P_0(1,1) - P_0(2,1) = 1$，可得 $f(t) = P_t(1,1) - P_t(2,1) = e^{-(\lambda+\mu)t}$。代入式 (4)，可得

$$P_t(1,1) = P_0(1,1) + \int_0^t P'_s(1,1)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t -\lambda \cdot e^{-(\lambda+\mu)s}\,\mathrm{d}s = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

同理可以算出 $P_t(1,2), P_t(2,1)$ 和 $P_t(2,2)$。

3 平稳分布与细致平衡条件

之前在离散时间马尔可夫链上得出的一些关于平稳分布的结论，现在也可以类似地推广到连续时间马尔可夫过程上。

我们首先来考虑无周期性和不可约性。

定义 8 (可约与不可约). 对于一个连续时间马尔可夫过程 $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$，若对于任意状态 $i, j \in \Omega$ 且 $i \neq j$，存在有限个不同的状态 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，其中 $k_1 = i$，$k_n = j$，使得 $\forall 1 \leq t < n$，$q(k_t, k_{t+1}) > 0$，我们称该马尔可夫过程是不可约的。

容易看出，连续时间马尔可夫过程的不可约性等价于其对应的离散时间马尔可夫链的不可约性。对于连续时间马尔可夫过程，我们有一定的概率在原状态保持一定时间不动，所以无周期性是自然成立的。

同样地，我们可以定义平稳分布。

这儿 $\pi^\top P_t$ 的定义可以类比于矩阵乘法：

$$\pi^\top P_t : j \in \Omega \mapsto \sum_{i\in\Omega} \pi(i) P_t(i,j).$$

定义 9 (平稳分布)**.** 若 Ω 上的分布 π 满足 $\forall t \geq 0$，$\pi^\top \cdot P_t = \pi^\top$，我们称 π 是该马尔可夫过程的一个平稳分布。

命题 10. 分布 π 是平稳分布当且仅当 $\pi^\top Q = 0$。

证明. 我们先来证明“仅当”。假设 π 是平稳分布，那么对于任意的状态 $j \in \Omega$ 以及时间 $t > 0$，有 $\sum_{i\in\Omega} \pi(i) P_t(i,j) = \pi(j)$。对该式两边求导可得 $\sum_{i\in\Omega} \pi(i) P'_t(i,j) = 0$。由 KFE，$P'_t(i,j) = \sum_{k\in\Omega} P_t(i,k) Q(k,j)$，故

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i\in\Omega} \pi(i) \cdot \left(\sum_{k\in\Omega} P_t(i,k) Q(k,j) \right) \\
&= \sum_{k\in\Omega} Q(k,j) \cdot \sum_{i\in\Omega} \pi(i) \cdot P_t(i,k) \\
&= \sum_{k\in\Omega} Q(k,j) \cdot \pi(k).
\end{aligned}$$

下面我们证明另一个方向，若 $\pi^\top Q = 0$，由 KBE，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\left(\pi^\top P_t\right)(j)}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i\in\Omega} \pi(i) \cdot P'_t(i,j) \\
&= \sum_{i\in\Omega} \pi(i) \cdot \left(\sum_{k\in\Omega} Q(i,k) P_t(k,j) \right) \\
&= \sum_{k\in\Omega} P_t(k,j) \cdot \sum_{i\in\Omega} \pi(i) Q(i,k) = 0.
\end{aligned}$$

这说明 $\left(\pi^\top P_t\right)(j)$ 的值始终是常数，而 $\pi^\top P_0(j) = \pi(j)$，故 $\pi^\top \cdot P_t = \pi^\top$ 成立。 □

我们之前讲过，对于离散时间的马尔可夫链，满足细致平衡条件的分布一定是平稳分布，这个结论对于连续时间马尔可夫过程也成立，只需要把定义里面的 P 换成 q 就好。

命题 11. 若对于任意的状态 $i \neq j$，若分布 π 满足 $\pi(i) q(i,j) = \pi(j) q(j,i)$，则 π 是该马尔可夫过程的一个平稳分布。

证明. 由命题 10，我们只需证明 π 满足 $(\pi^\top Q)(j) = 0$ 即可。由于 π 满足细致平衡条件，

$$\begin{aligned}\left(\pi^\top Q\right)(j) &= \sum_{i\in\Omega} \pi(i)\cdot Q(i,j)\\ &= \sum_{i\neq j} \pi(i) q(i,j) - \lambda_j \cdot \pi(j)\\ &= \sum_{i\neq j} \pi(j) q(j,i) - \lambda_j \cdot \pi(j)\\ &= \pi(j)\cdot\left(\sum_{i\neq j} q(j,i) - \lambda_j\right) = 0.\end{aligned}$$

□

示例 12 (生灭过程的平稳分布). 我们计算示例 3中定义的生灭过程的平稳分布 π，根据细致平衡条件，对于任意的 $n \geq 1$，$\pi(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\cdot\pi(n-1)$，以此类推，可以得出 $\pi(n) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\lambda_k}{\prod_{k=1}^{n}\mu_k}\cdot\pi(0)$。

示例 13 (纯生过程，Yule process). 假设在生灭过程中 $\mu_n = 0$，$\lambda_n = \beta n$，其中 $\beta > 0$ 是一个常数，这是一个生育率为 β 的纯生过程。我们首先来计算 $P_t(1,j)$，对于 $j \geq 1$，由 *KFE* 可知，$P_t'(1,j) = \beta(j-1)\cdot P_t(1,j-1) - \beta j\cdot P_t(1,j)$，通过递推计算，可以得出 $P_t(1,j) = e^{-\beta t}\cdot\left(1-e^{-\beta t}\right)^{j-1}$。进一步地，我们可以通过 $P_t(1,j)$ 来计算任意的 $P_t(i,j)$（其中 $i < j$），通过枚举这个初始的 i 个人中每个人的家族人数变化，可以得出

$$P_t(i,j) = \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_i=j,\\ n_k\geq 1}} \prod_{1\leq k\leq i} P_t(1,n_k) = \binom{j-1}{i-1}\cdot\left(e^{-\beta t}\right)^i\cdot\left(1-e^{-\beta t}\right)^{j-i}.$$

纯生过程是一个可约的马尔可夫过程，并且易知它不存在平稳分布。

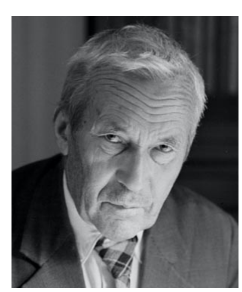
示例 14 (示例 7的平稳分布). 我们来计算示例 7中定义的状态空间 $\Omega = \{1,2\}$ 的马尔可夫过程的平稳分布，根据细致平衡条件，我们可以列出以下方程：

$$\begin{cases}\lambda\cdot\pi(1) = \mu\cdot\pi(2)\\ \pi(1)+\pi(2) = 1\end{cases}.$$

解得 $\pi(1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$，$\pi(2) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$。

A 连续与离散时间马尔可夫过程的对应关系

连续时间与离散时间的马尔可夫过程联系紧密，在本讲的最后，我们把这二者对应的概念放在一起对照着食用。我们认为熟识这个对比可以提供很好的直观，并对未来学习连续状态空间的马尔可夫过程很有帮助。



科尔莫格洛夫老师看着你

概念	连续时间马尔可夫过程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$	离散时间马尔可夫链 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$
转移概率	P_t	P^t
跳转速率	$\forall i \neq j,\ q(i,j) := \lim_{h\to 0} \frac{P_h(i,j)}{h}$	$P(i,j)$
生成元	Q	$P - I$
KBE	$P_t' = QP_t$	$P^t - P^{t-1} = (P-I)P^{t-1}$
KFE	$P_t' = P_tQ$	$P^t - P^{t-1} = P^{t-1}(P-I)$